

Cours no 11
Le 1 juin 2012

Mathématiques appliquées et numériques

Licence 3, Dpt Géosciences
Année 2011-2012, 2e semestre

Présentation synthétique du cours

Janvier – Juin 2012

Cours donné en 3^e année de
Licence de Sciences de la planète Terre
par Michael Ghil et Jean Roux
TD par Mohamadou Diallo
École normale supérieure, Paris

Onzième cours

Le modèle de Lorenz et ses applications à la convection atmosphérique.

11.1 Importance du modèle de Lorenz.

Le système de trois EDO non linéaires que nous étudions dans ce cours a été proposé par E. N. Lorenz en 1963. Il a une importance considérable pour deux raisons complémentaires l'une de l'autre. Tout d'abord parce que c'est un modèle paradigmatique pour les comportements chaotiques, et connu comme tel à travers les sciences physiques, de la vie et même socio-économiques. Et après, de manière plus spécifique pour la météorologie, car il a été le premier exemple montrant l'impossibilité théorique de prédire le temps au-delà d'un nombre fini de jours. Cette limite théorique de la prévisibilité est de l'ordre de 10 à 15 jours, mais la prévision détaillée du temps reste bien en deçà, même pour les modèles numériques à très haute résolution disponibles sur les ordinateurs ultra-puissants d'aujourd'hui.

Le système modélise, de manière très simplifiée, un phénomène de convection : un fluide – qui pourrait-être l'air, l'eau, un fluide de refroidissement –, est chauffé par dessous par une plaque, jusqu'au développement de la convection ; dans le cas de l'atmosphère, la "plaque chauffante" serait le sol soumis au rayonnement solaire. Selon l'intensité du chauffage, l'écoulement convectif peut-être plus ou moins régulier : pour un chauffage faible il est laminaire dans l'espace et constant ou périodique dans le temps tandis que, pour un chauffage suffisamment intense, il devient irrégulier dans l'espace aussi bien que dans le temps.

Ce comportement irrégulier pour un système à faible nombre de degrés de liberté – quoique soupçonné déjà par H. Poincaré à la fin du 19^e siècle –, a été une grande surprise dans les années 1960 et 70 : en effet, les solutions explicites d'EDO sont toutes assez lisses et on s'attendait plutôt au même type de comportement pour des solutions d'autres EDO, quoique obtenues numériquement. Qui plus est, on associait les irrégularités de comportement exclusivement avec les interactions de très nombreuses particules, comme A. Einstein l'avait démontré en 1905 pour le mouvement brownien.

Ce type de comportement pour les solutions d'un système déterministe, surtout de faible dimension, a été donc appelé *chaotique*. Comme nous le verrons, il est caractérisé par une grande sensibilité aux données initiales et, de ce fait, par une perte de prévisibilité en temps fini, quoique les solutions existent et sont uniques pour tous les temps. Naturellement le modèle de Lorenz n'est qu'une idéalisation de la réalité météorologique : la rotation de la Terre, l'interaction océan-atmosphère, les nuages, la glace des pôles – et donc la grande hétérogénéité de l'albédo de la surface de la Terre –, ne sont pas pris en compte par le modèle.

La réalité physique est donc bien plus complexe, mais déjà les solutions du modèle de Lorenz présentent une grande variété de comportements que nous ne pourrions qu'effleurer ici. Des centaines de publications se sont penchées sur ce modèle et, encore aujourd'hui, il est l'objet de travaux actifs. Les traits les plus frappants de son comportement chaotique ont été numériquement observés par Lorenz mais la preuve mathématiquement rigoureuse de son existence n'a été faite qu'en 1999 par W. Tucker (voir livre pour la référence).

11.2 Le modèle classique de Lorenz

Étant donné l'importance de ce modèle, la construction de ce modèle, à partir des équations de la physique, est faite en détails dans le livre. Finalement, on arrive au modèle de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{X} = P_r(Y - X), \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ. \end{cases} \quad (11.2.1)$$

La variable X représente l'intensité des rouleaux de convection, tandis que les variables Y et Z sont les composantes horizontale et verticale, respectivement, du gradient de température. Les trois paramètres qui apparaissent dans les équations sont : le nombre de Prandtl P_r , qui est le rapport non-dimensionnel entre la viscosité cinématique et la diffusion thermique ; le nombre r qui est proportionnel au nombre de Rayleigh R ; b qui est lié à la longueur d'onde horizontale q (voir remarque 11.2.2). Le nombre de Rayleigh R représente le rapport non-dimensionnel entre le forçage thermique et la dissipation, mécanique autant que thermique. Ces paramètres sont évidemment tous strictement positifs.

Dans ces formules $\dot{\Xi}$ désigne la dérivée de la variable Ξ par rapport au temps non dimensionnel \tilde{t} (cf. livre). La non-linéarité apparaît par les termes quadratiques XY et XZ , qui représentent l'interaction entre l'écoulement et la flottabilité du fluide.

Remarque 11.2.1. *On vérifie que le système de Lorenz est invariant par la symétrie $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$, c'est-à-dire par une rotation de π autour de l'axe Oz .*

Remarque 11.2.2. *La construction du modèle de Lorenz impose des contraintes sur les valeurs des paramètres. Par exemple $b = 4\pi^2/(\pi^2 + q^2) \leq 4$ (voir livre) ; Lorenz a choisi $b = 8/3$ dans ses simulations numériques.*

Remarque 11.2.3. *Le système (11.2.1) est une approximation relativement grossière du système complet d'équations aux dérivées partielles, cependant certains comportements des solutions du système de Lorenz sont proches de ceux que l'on observe expérimentalement en thermoconvection, pour r suffisamment petit.*

11.3 Étude qualitative du modèle de Lorenz

11.3.1 Premières propriétés des solutions du système (11.2.1)

Comme indiqué précédemment, la question de l'existence et de l'unicité des solutions de ce système pour tous les temps est compliquée et dépasse largement le cadre de ce cours. Par contre on veut étudier le comportement asymptotique de la solution $\vec{u}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et ceci pour des valeurs arbitraires mais fixes des paramètres.

Opérons dans (11.2.1) le changement de variable $X \rightarrow X$, $Y \rightarrow Y$ et $Z \rightarrow Z + r + P_r$, le système devient

$$\begin{cases} \dot{X} + P_r X - P_r Y = 0 \\ \dot{Y} + P_r X + Y + XZ = 0 \\ \dot{Z} + bZ - XY = -b(r + P_r) \end{cases} \quad (11.3.1)$$

Considérons le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^3 , ainsi $(\vec{u}, \vec{u}) = X^2 + Y^2 + Z^2$, et la norme associée, que nous notons $|\cdot|$. On a $|\dot{\vec{u}}|^2 = (\dot{\vec{u}}, \dot{\vec{u}})$ et $d|\vec{u}|^2/dt = 2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} + 2Z\dot{Z}$.

Par une simple analyse (voir livre) on montre que $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\vec{u}(t)| \leq \rho_0$ pour un certain ρ_0 dépendant essentiellement de b , r et P_r . La dynamique du système est donc contenue asymptotiquement dans la boule fermée $B_{\rho_0} = B(0, \rho_0)$ de \mathbb{R}^3 . Pour t suffisamment grand les trajectoires sont confinées dans la boule B_{ρ_0} , une telle boule est appelée une boule *absorbante*.

Cette notion de boule absorbante est liée à celle d'*attracteur*.

Définition 11.3.1. *Un attracteur est un ensemble fermé \mathcal{A} satisfaisant aux propriétés suivantes*

- 1) *\mathcal{A} est un ensemble invariant : toute trajectoire $\vec{u}(t)$ partant dans \mathcal{A} reste dans \mathcal{A} pour tout t .*
- 2) *\mathcal{A} attire un ensemble ouvert de données initiales, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble ouvert U contenant \mathcal{A} tel que si $\vec{u}(0) \in U$, alors la distance de $\vec{u}(t)$ à \mathcal{A} tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela signifie que \mathcal{A} attire toutes les trajectoires qui partent suffisamment près de lui. Le plus grand de ces ensembles U est appelé le bassin d'attraction de \mathcal{A} ;*
- 3) *\mathcal{A} est minimal : il n'existe pas de sous-ensemble strictement plus petit que \mathcal{A} tel que les conditions (1) et (2) soient satisfaites.*

D'après l'analyse dont nous faisons mention, il est clair que si $\vec{u}(0) \in B_{\rho_0}$ alors $\vec{u}(t) \in B_{\rho_0}$ pour tout $t > 0$. L'item (2) de la définition d'un attracteur est aussi vérifié car il est clair aussi que B_{ρ_0} attire toutes les trajectoires quel que soit $\vec{u}(0) \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $U = \mathbb{R}^3$. Par contre B_{ρ_0} n'est pas minimal : les expériences numériques de Lorenz et de beaucoup d'autres après lui ont montré, et cela a été rigoureusement prouvé ensuite, que l'attracteur

\mathcal{A} du système (11.3.1) est un ensemble beaucoup plus petit et que, pour certaines valeurs des paramètres, il a une structure très compliquée. Nous en reparlerons plus tard. Ce type d'attracteur a été appelé *étrange* par D. Ruelle et F. Takens.

11.3.2 Les solutions stationnaires.

Nous poursuivons notre étude du comportement du système de Lorenz en utilisant les techniques du cours no 10 précédent : d'abord les solutions stationnaires (points fixes) et l'étude de leur stabilité. Ensuite nous étudierons les solutions périodiques (cycles limites) avec l'examen de leur stabilité. Finalement, grande nouveauté, nous examinerons les solutions aperiodiques ou chaotiques, qui "habitent" l'attracteur étrange.

Notre paramètre de bifurcation sera le nombre relatif de Rayleigh r . Nous verrons en effet que $r = 1$ sera le premier point de bifurcation.

Calculons d'abord les solutions stationnaires. La première équation du système (11.2.1) donne $X = Y$ et la troisième entraîne alors que $Z = XY/b = X^2/b$. La seconde équation permet d'écrire que $-X^3/b + rX - X = 0$, ce qui donne les trois racines $X = 0, X = \pm\sqrt{b(r-1)}$. Notons $S = \sqrt{b(r-1)}$, le radicande est positif si $r \geq 1$.

- Si $X = 0$ alors $Y = Z = 0$ pour tout r . C'est un état où seule la conduction opère et il n'y a pas de convection.
- Si $X = \pm S$, alors $Y = \pm S$ et $Z = S^2/b = r - 1$ pour $r \geq 1$.

D'où les états d'équilibre

- *Conduction* : $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ pour tout r . C'est la branche triviale de solutions notée $\vec{u} = \vec{0}$.
- *Convection* : $C^\pm = (X^\pm, Y^\pm, Z) = (\pm S, \pm S, r - 1)$ pour $r \geq 1$. Ce sont les deux branches non triviales, où sur chacune des deux $X = Y$.

Les deux branches convectives bifurquent, comme nous le verrons ci-dessous, à partir de la branche triviale en $r = 1$: vu la symétrie mentionnée précédemment dans les équations (11.2.1), nous nous attendons à une bifurcation de fourche (voir Paragraphe 10.1.2 du cours no 10).

11.4 Stabilité de la branche stationnaire triviale $\vec{0}$.

L'étape suivante dans la démarche est la détermination de la stabilité (voir cours no 10) des branches de solutions trouvées ci-dessus. Pour ce faire, calculons d'abord la matrice jacobienne du système (11.2.1) :

$$J = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 \\ -Z + r & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix}. \quad (11.4.1)$$

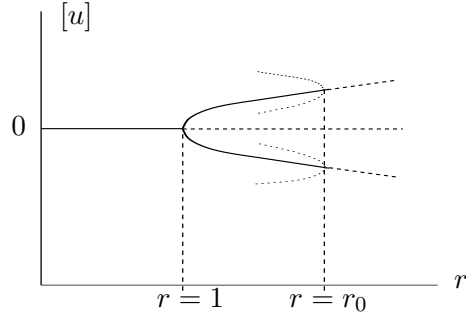


Figure 11.1: Les lignes en tirets indiquent les portions de branche de solutions stationnaires instables, les lignes en pointillés les cycles limites instables.

Les trois valeurs propres (μ_1, μ_2, μ_3) de cette matrice sont données, pour la solution triviale $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, par

$$\det(J - \mu I) = \{\mu^2 + (P_r + 1)\mu + P_r(1 - r)\}(\mu + b) \quad ;$$

il s'ensuit immédiatement que $\mu_3 = -b < 0$. La matrice jacobienne a nécessairement une racine réelle négative. Les deux autres valeurs propres μ_1 et μ_2 sont les racines du facteur polynômial du second degré et satisfont aux relations $\mu_1 + \mu_2 = -(P_r + 1) < 0$ et $\mu_1\mu_2 = P_r(1 - r)$; elles sont données par

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2}(P_r + 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(P_r + 1)^2 + 4P_r(r - 1)}.$$

Le radicande est strictement positif si $r > 1 - (P_r + 1)^2/(4P_r) = -(P_r - 1)^2/(4P_r)$ et les racines sont alors réelles. De plus, pour $r < 1$, il est clair que les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont négatives. Au total pour $0 < r < 1$ les trois valeurs propres sont réelles négatives et la branche triviale est stable : la solution $\vec{u} = \vec{0}$ est un puits. A contrario, pour $r > 1$, la valeur propre μ_1 - qui correspond au choix du signe + dans la formule ci-dessus -, est positive et la branche triviale est donc instable. La branche triviale possède, de ce fait, un point de bifurcation fourche ($\vec{u} = \vec{0}, r = 1$) où naissent les deux branches de solutions stationnaires convectives et non triviales : $C^\pm = (X^\pm, Y^\pm, Z) = (\pm S, \pm S, r - 1)$ pour $r \geq 1$ - Figure 11.1.

Remarque 11.4.1. La notation $[u]$ de la Figure 11.1 désigne une mesure scalaire de la solution $\vec{u} = (X, Y, Z)^T$ qui n'est pas nécessairement une norme. Cette mesure $[u]$ est cruciale à la bonne lecture des phénomènes dans tout diagramme de bifurcation, mais il n'y a pas de choix idéal. En pratique, il faut s'efforcer de choisir un $[u]$ qui mette en évidence autant de propriétés des branches de solutions individuelles que possible.

11.5 Stabilité des branches convectives C^\pm .

Étudions maintenant pour $r > 1$ la stabilité des deux branches non triviales, ce qui revient à étudier le signe de chacune des valeurs propres réelles – ou alors de leur partie réelle si la valeur propre est imaginaire –, de la matrice jacobienne (11.4.1) associée à chacune des branches. Considérons la branche positive C^+ . La matrice jacobienne correspondante, notée J^+ , s'écrit pour toute solution le long de cette branche

$$J^+ = \begin{pmatrix} -P_r & P_r & 0 \\ 1 & -1 & -S \\ S & S & -b \end{pmatrix}; \quad (11.5.1)$$

le paramètre de branchement r est “caché” dans S . Calculons les valeurs propres de J^+ , elles sont solutions de l'équation

$$\mu^3 + (P_r + 1 + b)\mu^2 + (b + bP_r + S^2)\mu + 2P_r S^2 = 0. \quad (11.5.2)$$

N.B. : On a vu (Remarque 11.2.1) que le modèle de Lorenz est invariant par la symétrie $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$; or la branche C^- , dans cette symétrie, est symétrique de C^+ . L'étude de la stabilité de la branche C^- est donc identique à celle de la branche C^+ . On peut voir aussi que les coefficients du polynôme en (11.5.2), dont les racines μ donnent la stabilité de ces branches, dépendent seulement de S^2 et non pas de $\pm S$. \square

Considérons le polynôme caractéristique (11.5.2) dont les racines sont les valeurs propres de la matrice jacobienne pour la branche positive C^+ des solutions stationnaires. C'est un polynôme de degré impair possédant toujours une racine réelle. Étant du troisième degré, il existe deux possibilités pour ces racines. Ces deux possibilités sont :

- i) les trois racines μ_1, μ_2 et μ_3 sont réelles ;
- ii) une racine μ_3 est réelle, les deux autres racines $\mu_1 = \alpha + i\beta$ et $\mu_2 = \overline{\mu_1}$ sont complexes conjuguées, car les coefficients de l'équation sont réels.

Remarque 11.5.1. *La partie réelle α des valeurs propres imaginaires conjuguées va jouer un rôle important dans la suite.*

Ceci laisse supposer, si le cas ii) existe, qu'il peut exister une bifurcation de Hopf (voir cours no 10). Montrons l'existence d'un point de bifurcation de Hopf. La stabilité des solutions stationnaires convectives, pour $1 < r < r_0$, sera une conséquence - un peu inattendue - de la preuve de cette existence.

11.5.1 Existence d'une bifurcation de Hopf ?

On rappelle (théorème 10.3.1 du paragraphe 10.3 du cours no 10) les trois conditions nécessaires d'une bifurcation de Hopf. On note par $\mu(r) = \alpha(r) + i\beta(r)$ une valeur propre du jacobien f_y .

Considérons une solution stationnaire y_0 de f et une valeur du paramètre r_0 telles que

- 1) $f(y_0, r_0) = 0$ (car y_0 est une solution stationnaire),
- 2) $f_y(y_0, r_0)$ a une paire de valeurs propres imaginaires pures, soit $\mu_{\pm}(r_0) = \pm i\beta(r_0)$,
- 3) (Condition de transversalité) $(d(\operatorname{Re}\mu(r))/dr)|_{r=r_0} = \alpha'(r_0) \neq 0$.

Alors il y a en (y_0, r_0) naissance de cycles limites. La période initiale (de l'oscillation d'amplitude nulle) est $T_0 = 2\pi/\beta(r_0)$.

Cherchons l'éventualité de l'existence d'un point de bifurcation de Hopf. Il faut trouver une valeur r_0 du paramètre r - qui doit être nécessairement supérieur ou égal à 1 car pour $r < 1$ il n'existe qu'une solution stationnaire nulle dite triviale - pour laquelle les trois conditions précédentes sont satisfaites.

La première de ces conditions est trivialement satisfaite en nous plaçant sur l'une des branches convectives C^{\pm} . Pour vérifier la deuxième, soit le polynôme caractéristique (11.5.2), il peut s'écrire $P(\mu) = \mu^3 - \Sigma_1\mu^2 + \Sigma_2\mu - \Sigma_3$ où $\Sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ est la trace de la matrice jacobienne (11.4.1), $\Sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3$ et $\Sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$ est le déterminant de cette matrice. Alors la condition nécessaire d'existence d'un point de bifurcation de Hopf, où le spectre a la forme $\operatorname{sp}(J^+) = (i\beta, -i\beta, \mu_3)$, est :

$$\Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma_3. \quad (11.5.3)$$

En effet, plaçons-nous dans le cas ii) de l'existence d'une paire de racines complexes conjuguées et supposons $\alpha = 0$. Il vient $\Sigma_1 = \mu_3$, $\Sigma_2 = \beta^2$ et $\Sigma_3 = \beta^2\mu_3$, d'où $\Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma_3$. La relation (11.5.3) est donc nécessaire pour l'existence d'une paire de racines imaginaires conjuguées pures.

D'après (11.5.2), on a :

$$\begin{cases} \Sigma_1 &= -(P_r + 1 + b), \\ \Sigma_2 &= (r + P_r)b, \\ \Sigma_3 &= -2P_r b(r - 1). \end{cases} \quad (11.5.4)$$

Lemme 11.5.1. *Il existe toujours une racine réelle μ_3 strictement négative pour $r > 1$.*

Preuve : Tous les coefficients sont positifs. Comme $\Sigma_3 < 0$, si on est dans le cas ii) alors $\mu_1\mu_2 = \mu_1\bar{\mu}_1 = |\mu_1|^2 > 0$ et donc $\mu_3 < 0$, si on est dans le cas i) une (resp. trois) racine(s) est (resp. sont) nécessairement négative(s). Dans tous les cas la conclusion suit. \square

Selon (11.5.3) et (11.5.4), une condition nécessaire d'existence d'une paire de racines imaginaires pures est donc

$$(P_r + 1 + b)(r + P_r)b = 2P_r(r - 1), \quad (11.5.5)$$

soit

$$r_0 = \frac{P_r(P_r + 3 + b)}{P_r - b - 1}. \quad (11.5.6)$$

Si $P_r \leq b + 1$ il n'y a aucune valeur positive du paramètre r satisfaisant à (11.5.6). Il faut même, de plus, que $r_0 \geq 1$. Nous supposons donc que le nombre de Prandtl P_r est assez large, soit $P_r > b + 1$ – alors nécessairement $r_0 > 1$ car $P_r/(P_r - b - 1) > 1$ avec $(P_r + 3 + b) > 1$. Avec cette dernière condition, pour $r = r_0$ satisfaisant à (11.5.6), il peut apparaître un cycle limite.

On sait déjà que $\alpha(r_0) = 0$, car r_0 a été calculé pour que les valeurs propres soient imaginaires pures pour cette valeur de r .

Il nous reste à vérifier la condition (3) de transversalité. Un calcul élémentaire (voir livre) montre que :

$$\alpha'(r_0) = \frac{(P_r - b - 1)b}{2[b(r_0 + P_r) + (P_r + b + 1)^2]}. \quad (11.5.7)$$

Lorsque $P_r > b + 1$ on vérifie trivialement que $\alpha'(r_0) > 0$, et la condition de transversalité est satisfaite.

Finalement pour la valeur r_0 du paramètre nous avons donc, sur chacune des branches stationnaires convectives, une bifurcation de Hopf.

11.5.2 Suite de l'étude de stabilité des solutions convectives.

Comme annoncé on peut en déduire des résultats de stabilité des solutions stationnaires non triviales C^\pm . La condition de positivité de la dérivée $\alpha'(r)$ en $r = r_0$ entraîne que la partie réelle α de la valeur propre $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ croît avec r au voisinage de r_0 . Puisque $\alpha(r_0) = 0$ il s'ensuit que, pour r suffisamment proche de r_0 , $\alpha(r) < 0$ et $\alpha(r) > 0$ pour $r > r_0$, tandis que $\beta \neq 0$. La branche C^+ , ainsi que la branche C^- , de solutions stationnaires, au moins localement, c'est-à-dire autour de r_0 , est stable pour $r < r_0$ car $\alpha(r) < 0$ et devient *instable* après le passage par r_0 car $\alpha(r) > 0$, c'est-à-dire que les valeurs propres imaginaires conjuguées ont, pour $r > r_0$, une partie réelle positive.

Faisons un premier point. Si $P_r < b + 1$ il n'y a aucune valeur positive du paramètre r satisfaisant à (11.5.6) et les deux solutions convectives stationnaires C^\pm – qui n'existent que pour $r > 1$ –, sont stables pour toute valeur de $r > 1$. Pour $P_r > b + 1$ et $r_0 > 1$, l'instabilité des états convectifs apparaît pour la valeur $r = r_0$ du paramètre et c'est là que naît une branche de solutions périodiques, à partir de chacune des solutions convectives C^\pm .

Une étude (voir livre) plus fine est nécessaire pour décider, sur tout l'intervalle $1 < r < r_0$, d'une part des valeurs de r pour lesquelles les racines de (11.5.2) sont réelles ou complexes conjuguées, d'autre part des signes des valeurs propres réelles ou des parties réelles $\alpha(r)$ des racines complexes. On démontre qu'il existe r^* telle que pour toute valeur de r vérifiant $1 < r^* < r < r_0$, les deux branches non triviales C^\pm sont attractives (ce que nous savions déjà localement), car, plus précisément, pour chacune de ces branches, pour ces valeurs de r nous avons alors une valeur propre réelle négative et une paire de valeurs propres imaginaires conjuguées à partie réelle négative. De plus pour $1 < r < r^*$ les trois valeurs propres sont réelles négatives. Nous en concluons que pour toute valeur de r telle que $1 < r < r_0$ les deux branches convectives C^\pm sont stables.

Par conséquent, étant donné l'instabilité de la branche stationnaire nulle dans l'intervalle $1 < r < r_0$, une solution qui démarre près de l'origine devrait "s'enrouler" autour de C^+ ou de C^- .

Enfin, comme on sait que la branche triviale est toujours instable pour $r > 1$, pour $r > r_0$ et r proche de r_0 les trois branches d'états stationnaires sont instables (voir Figure 11.1).

Résumons cette première étude de stabilité des branches C^\pm .

Ces branches ne peuvent être instables que si $r > r_0$, en supposant que P_r et b sont tels que r_0 existe et $r_0 > 1$.

Ces branches sont stables si et seulement si

- (a) $P_r < b + 1$ (c'est-à-dire que r_0 n'existe pas) et $r > 1$,
ou alors
- (b) $P_r > b + 1$ (r_0 existe) et $1 < r < r_0$.

Remarque 11.5.2. Pour $P_r = 10$ et $b = 8/3$, on vérifie que $P_r > b + 1$, la bifurcation de Hopf apparaît pour $r_0 = 470/19 = 24.74$ (voir (11.5.6)).

Remarque 11.5.3. Nous venons de voir qu'au point de bifurcation de Hopf, les valeurs propres complexes sont $\mu_{1,2} = \pm i\beta(r_0)$, avec $\beta(r_0) \neq 0$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $\beta(r_0) > 0$. La période initiale de la solution périodique – voir le début du paragraphe 11.3.4 –, est $T = 2\pi/\beta(r_0)$.

11.6 Sous-criticité de la bifurcation de Hopf.

Ce qui précède ne dit rien sur la nature de la bifurcation de Hopf en $r = r_0$. Il naît des solutions périodiques en ce point, mais leur stabilité – voir le cours 10 pour la définition de cette stabilité –, reste à déterminer. En d'autres mots, cette bifurcation de Hopf est-elle sur- ou sous-critique (voir le cours 10 pour les définitions et l'analyse) ? S'il n'y a ni point fixe stable ni cycle limite stable au-delà de $r = r_0$, quel est le comportement du modèle pour $r > r_0$?

Que se passe-t-il au point de bifurcation de Hopf, pour r légèrement plus grand que r_0 ? Si la bifurcation de Hopf était surcritique, chaque solution stationnaire des branches non triviales C^\pm serait encerclée d'un cycle limite stable. Mais cela n'est pas le cas car, numériquement, il s'avère qu'avec les valeurs des paramètres choisies par Lorenz – $P_r = 10$ et $b = 8/3$ –, on ne constate aucune solution périodique stable pour r légèrement plus grand que r_0 .

Mais alors d'où viennent les orbites périodiques dont on a montré l'existence ? Lorenz a conjecturé, grâce à ses calculs, qu'elles doivent naître pour un r tel que $1 < r < r_0$, c'est-à-dire que la bifurcation de Hopf est sous-critique. C'est-à-dire que, pour chaque branche, un cycle limite instable qui existe pour $r < r_0$, disparaît pour $r = r_0$ au point d'équilibre en lui transmettant son instabilité pour $r > r_0$.

Cependant ce n'est pas toujours le cas, cela dépend des valeurs de P_r et b . La preuve rigoureuse du comportement sur- ou sous-critique – c'est-à-dire de la stabilité ou de l'instabilité des orbites périodiques, issues de la bifurcation de Hopf –, selon les valeurs du couple de paramètres (P_r, b) , se trouve dans Marsden, MacCracken (voir biblio). Pour les valeurs standard $P_r = 10$ et $b = 8/3$, pour lesquelles les résultats sont présentés, la bifurcation est effectivement sous-critique pour $r_0 = 24.74$.

Le portrait de phase qui correspond à ce cas est exhibé à la partie gauche de la Figure 11.3 et les branches de solutions périodiques instables pour $r < r_0$ sont montrées en pointillés dans la Figure 11.1.

11.7 Comportement du modèle pour $r > r_0$

Le diagramme partiel de bifurcation dans la Figure 11.1, basé sur les résultats mentionnés ci-dessus, montre qu'il n'y a pas d'attracteur stable, du type point fixe ou cycle limite, pour des valeurs de r proches de, mais supérieures à, $r = r_0$. Pour $r > r_0$ les trajectoires peuvent éventuellement évoluer vers un attracteur éloigné qui est toujours, nécessairement, dans la boule absorbante B_{ρ_0} , mais qui, au moins dans un voisinage de r_0 , devrait-être plus complexe qu'un attracteur trivial du type point fixe ou un cycle limite. Mais que peut-il être ?

Se pourrait-il cependant qu'il existe un cycle limite stable que nous ignorons ? Lorenz donne un argument heuristique et astucieux, appuyé sur des résultats numériques, précisant que, pour $r > r_0$ et légèrement plus grand que r_0 , tout cycle limite serait instable. Lorenz a choisi la valeur $r = 28$ pour ses expériences numériques. Cet argument consiste d'abord à intégrer le système sur une longue durée et à repérer sur la courbe $t \rightarrow Z(t)$ les maxima locaux successifs $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_n, Z_{n+1}, \dots\}$.

Lorenz définit une fonction $Z_{n+1} = f(Z_n)$, - dite l'*application de Lorenz*.

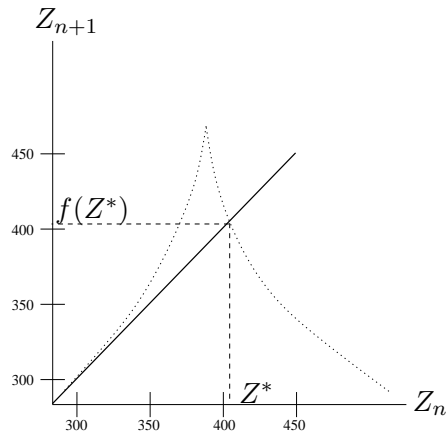


Figure 11.2: La ligne en pointillés indique la courbe “stylisée” (un “cusp”) $Z \rightarrow f(Z)$, la ligne en trait plein désigne la première bissectrice. La courbe stylisée est obtenue pour les valeurs standards $P_r = 10$ et $b = 8/3$. Pour b/P_r très petit, cette courbe est composée de multiples cusps très étroits (C. Sparrow, Chapitre 8, page 174), la discussion est alors plus complexe.

On construit le graphe de cette fonction et on constate visuellement, sur la Figure 11.2, que $|f'(Z)| > 1$ et que la première bissectrice coupe la courbe $f(Z)$ en un point Z^* unique tel que $f(Z^*) = Z^*$, l'application f a donc un *point fixe*.

La suite des $\{Z_n\}$ peut être très compliquée et il ne faut pas la confondre avec la suite générée par l'algorithme de Picard - du cours no 1 - de calcul d'un point fixe d'une fonction f continue et lipschitzienne, car à la fois Z_n et Z_{n+1} sont des données. De plus, remarquons que, même interprété de ce point de vue, la convergence vers Z^* est impossible car $|f'(Z)| > 1$ pour tout Z . Cependant on peut se poser la question de la stabilité de Z^* pour cette application.

Supposons qu'il existe un cycle limite, c'est-à-dire une solution périodique isolée ; on a alors $Z_l = Z_{l+1} = Z_{l+2} = \dots = Z^*$ pour un certain indice l , car les maxima sont les mêmes d'une période à l'autre. Ce cycle limite correspond donc à l'existence d'une orbite fermée associée à Z^* . Considérons une trajectoire légèrement perturbée de cette orbite associée à Z^* , telle que $Z_n = Z^* + \eta_n$ où η_n est petit. Après l'habituelle linéarisation, on a $\eta_{n+1} = f'(Z^*)\eta_n$. Puisque $|f'(Z)| > 1$, il vient $|\eta_{n+1}| > |\eta_n|$. La déviation $|\eta_n|$ augmentant à chaque itération, la solution périodique - c'est-à-dire l'orbite fermée qui y est associée dans l'espace des phases -, est instable.

Remarque 11.7.1. *Insistons sur le fait que ce résultat d'instabilité est vrai pour $r > r_0$ qui n'est pas trop éloigné de r_0 (ici $r = 28$). Des expériences numériques indiquent que le système a un cycle limite globalement attractif*

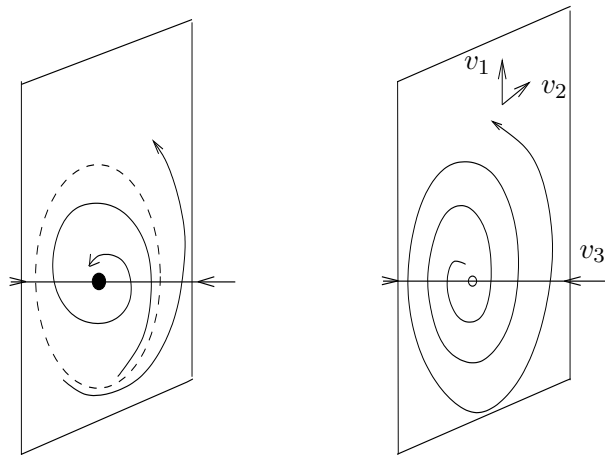


Figure 11.3: La figure de gauche est associée à $r < r_0$, celle de droite à $r > r_0$. La ligne en tirets sur la gauche indique le cycle limite instable.

pour tout $r > 313$ (voir Sparrow, Chapitre 7).

11.8 Un attracteur étrange.

Grâce à ce qui précède on peut donner une description qualitative de la dynamique pour $r_0 < r \ll 313$. Comme il n'y a pas de point fixe ou de cycle limite stable pour $r > r_0$ et voisin de r_0 , cela veut-il dire que les trajectoires sont rejetées à l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$? Non, car on a vu, à la section 11.3.1, que les trajectoires restent confinées dans la boule absorbante B_{ρ_0} . De plus, dès que $r > r_0$, on a vu qu'en chaque point de C^+ , le système linéarisé a deux valeurs propres complexes conjuguées $\mu_{1,2} = \alpha(r) \pm i\beta(r)$ avec des parties réelles $\alpha(r)$ positives auxquelles on associe deux vecteurs propres \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , et une valeur propre réelle $\mu_3 < 0$ - voir lemme 11.5.1 - à laquelle on associe un vecteur propre \vec{v}_3 . De sorte que les orbites avoisinantes spiralent en s'écartant du point fixe sur C^+ dans le plan engendré par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , qu'on appellera la *variété instable*, par commodité, sans entrer dans les complications d'une définition précise. Dans le même temps ces orbites approchent le point fixe dans une direction parallèle à \vec{v}_3 , qu'on appellera la *variété stable*. Ce comportement est illustré dans la partie droite de la Figure 11.3.

La situation est identique près de C^- . Ainsi les trajectoires ont un comportement non trivial à long terme : on sait numériquement que la solution $\vec{u}(t)$ approche de C^+ en suivant sa variété stable, puis spirale en s'éloignant selon sa variété instable et va ensuite vers C^- suivant la variété stable de C^- , et ainsi de suite. Les trajectoires sont rejetées d'un objet instable -

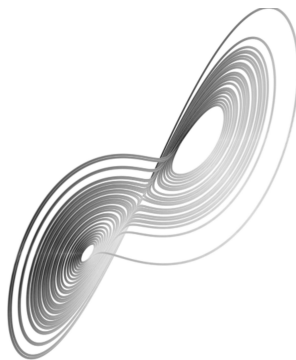


Figure 11.4: L'attracteur de Lorenz. Figure publiée grâce à la courtoisie de Jean-François Colonna du laboratoire Lactamme de l'École Polytechnique.

point fixe ou cycle limite –, à un autre, alors qu'elles sont confinées dans la boule absorbante B_{ρ_0} ; voir la Figure 11.4.

Le nombre de spirales déroulantes existantes dans chaque variété instable varie de façon imprévisible d'un passage près de C^+ ou C^- à l'autre. La séquence du nombre de circuits a beaucoup de caractéristiques d'une suite aléatoire. Lorsque la trajectoire est vue en trois dimensions, elle apparaît se déployer sur un ensemble extrêmement fin, dont la projection sur un plan qui passe par l'axe des Z ressemble à une paire "d'ailes de papillon". Cet ensemble est précisément l'*attracteur de Lorenz*.

Ce type d'attracteur – bien plus complexe qu'un point fixe, un cycle limite ou même un tore –, est un *attracteur étrange* selon la terminologie introduite par Ruelle et Takens en 1971. Un attracteur étrange est associé à un système dont les solutions sont caractérisées par leur *sensibilité aux données initiales*, c'est-à-dire que deux trajectoires issues de deux données initiales voisines – \vec{u}_0 et $\vec{u}_0 + \vec{\epsilon}$ disons, pour $\|\vec{\epsilon}\|$ petit –, divergent rapidement l'une de l'autre sur l'attracteur, avec des futurs totalement différents l'un de l'autre. C'est cette sensibilité aux données initiales qui donne le comportement irrégulier des solutions du modèle de Lorenz et d'autres modèles non linéaires déterministes, mais chaotiques. Un attracteur étrange montre de la sensibilité aux conditions initiales.

Cette sensibilité s'explique par l'existence d'un *exposant de Lyapounov* positif ; cet exposant généralise aux systèmes non linéaires la notion de valeur propre réelle et positive d'un système linéaire. On trouve, en effet, numériquement que l'écart $\delta\vec{u}(t)$ sur l'attracteur de deux points – considérés au même instant t , sur deux trajectoires séparées initialement par l'écart $\delta\vec{u}(0)$ –, se comporte comme $\|\delta\vec{u}(t)\| \approx \|\delta\vec{u}(0)\|e^{\lambda t}$ où $\lambda = 0.9$ est l'exposant de Lyapounov positif du système, les deux autres étant négatifs.

Une autre propriété importante de l'attracteur de Lorenz est qu'il a une dimension *fractale*, c'est-à-dire non entière, elle est comprise strictement en-

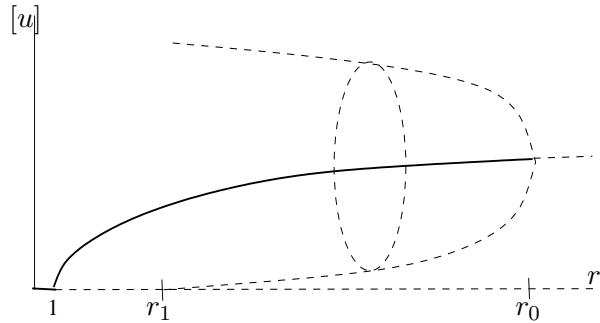


Figure 11.5: Résumé succinct du comportement du système de Lorenz pour de petites valeurs de r , en se limitant à la branche triviale, conductive et à la branche convective C^+ . Les lignes en tirets indiquent les points fixes et les cycles limites instables.

tre 2 et 3. Cette dimension ne peut pas être 2, car les seuls attracteurs possibles en dimension 2 sont les points fixes et les cycles limites stables. C'est un résultat classique de la théorie des systèmes dynamiques que nous admettons évidemment dans ce cours. Cette dimension ne peut pas être 3 non plus, car le volume $V(t)$ de l'attracteur tend exponentiellement vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ (voir livre pour une justification).

L'attracteur étrange du système (11.2.1) est donc un ensemble fractal, dont le volume est nul mais de surface infinie. On peut définir et déterminer la dimension d'un ensemble fractal. Des expériences numériques indiquent que la dimension de l'attracteur étrange de (11.2.1) est de l'ordre de 2.05 ± 0.01 .

Ce qui précède est une approche très simplifiée de l'étude de ce modèle, dont le but principal est de susciter la curiosité du lecteur et de le ou la motiver pour poursuivre, plus généralement, l'étude des comportements chaotiques dans les sciences de la planète et de la vie. De manière plus spécifique, que se passe-t-il, par exemple, en-dehors des valeurs des paramètres utilisés ci-dessus ? Mais aussi nous n'avons pas exploré, même avec ces valeurs standard, l'ensemble des phénomènes possibles.

Lorsque r décroît à partir de r_0 , les cycles limites instables, naissant au point de bifurcation Hopf sous-critique, se dilatent et passent de plus en plus près du point-selle sur la branche conductive $\vec{u} = \vec{0}$. Pour les valeurs standard de $P_r = 10, b = 8/3$ et pour $r_1 = 13.926$, ces cycles touchent l'origine et deviennent des orbites *homoclines*, c'est-à-dire des orbites qui partent de et arrivent au même point fixe, qui est l'origine $\vec{0}$ en l'occurrence. Pour $r < r_1$ il n'y a plus de cycle limite (Figure 11.5). On voit que l'analyse détaillée du système demande un examen approfondi pour lequel nous renvoyons à Sparrow.

Bibliographie :

- (1) E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141, 1963.
- (2) J.E. Marsden & M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications* Appl. Math. Sciences, vol. 19, Springer-Verlag, 1976.
- (3) C. Sparrow, *The Lorenz equation : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Appl. Math. Sciences, vol. 41, Springer-Verlag, 1982.
- (4) W. Tucker, The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328**(12), 1197-1202, 1999.