Durée de l'examen partiel : 2 heures. Tous les exercices sont indépendants. L'exercice 2 est probablement l'exercice exigeant le plus de calculs. L'exercice 4 a pour objectif de montrer que la convergence de la méthode de Newton, pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, ne peut être que locale. C'est le seul exercice qui demande un peu d'analyse élémentaire. Jusqu'à l'item 3.b la preuve se fait en quelques lignes - voire en deux lignes. La clarté de la rédaction sera évidemment prise en compte. Les documents distribués sont autorisés.

Exercice 1

Soit la formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

Montrer que cette formule d'intégration numérique est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

Exercice 2

Résoudre le système :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

sous la condition initiale $x = (1, 0, 0)^T$.

Exercice 3

Trouver, par la méthode de Gauss sans stratégie de pivot, l'inverse de la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

en supposant que M est inversible. On fait l'hypothèse que $a \neq 0$.

Vérifier que $MM^{-1} = I$ et en déduire le déterminant de la matrice M^{-1}. Vérifier la valeur de ce déterminant en le calculant directement avec l'expression de M^{-1}.

N.B. : Soit une matrice A, il est faux d'écrire $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ où λ est un scalaire. Il est trivial de vérifier que $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ si la matrice A est d'ordre 2. L'exposant de λ est celui de l'ordre de la matrice.

Exercice 4

Soit f une fonction d'un intervalle $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. On veut trouver $x \in I$ tel que $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

1) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans I.
b. Soit $x_0 \in I$, déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à f en x_0.

2) On définit la fonction g par :

$$g : x \in I \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in \mathbb{R} \tag{1}$$

a. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
b. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

3) On suppose que f' est décroissante.
a. Dessiner le graphe d'une fonction f vérifiant toutes les conditions de l'énoncé. On pourra penser à la fonction logarithme.
b. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\diamond$ x_{n+1} est bien défini.
- $\diamond$ $x_{n+1} \geq x_n$.
- $\diamond$ $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} \leq f'(x_n)$, puis que $x_{n+1}\alpha$.
- $\diamond$ $x_{n+1} \leq \alpha$.

Indication : On conseille d'utiliser le théorème des accroissements finis qui affirme que : si f est une fonction réelle continue de l'intervalle fermé $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. $\Box$

c. Montrer que la suite (x_n) converge vers α.

N.B. : La preuve précédente de la convergence de la méthode de Newton utilise, de façon essentielle, l'hypothèse que f' est décroissante. On part de $x_0 = a$ et la méthode de Newton converge. Dans le cas général, f' n'est pas nécessairement décroissante et la démonstration précédente n'opère pas. Cependant, on prouve, par le théorème de point fixe vu dans le cours, qu'en partant d'un point x_0 suffisamment proche de α, la méthode de Newton converge. Comme $g'(\alpha) = 0$, l'idée est qu'il existe un intervalle J centré en α tel que $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in J$ - ce qui exige de connaître la localisation de la solution α. Dès lors on peut appliquer le théorème de point fixe à g définie dans J, en partant d'un point $x_0 \in J$.