Tous les exercices sont indépendants. les exercices 1 et 2 sont des calculs matriciels à l'exception du 1-a). L'exercice 3 est très détaillé, seule la question f) de cet exercice est un peu délicate. L'exercice 4 est une application immédiate du cours.

Exercice 1

a) On sait qu'une matrice symétrique définie positive a un déterminant strictement positif. Donner un exemple pour lequel $det(A) > 0$ avec A non définie positive.
b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Calculer le déterminant de la matrice. Vérifier, sur cet exemple, que le déterminant d'une matrice bloc-triangulaire inférieure est égal au produit des déterminants des matrices blocs-diagonales.

Exercice 2

Il s'agit de montrer que la série $I + B + B^2 + \cdots$ converge vers $(I - B)^{-1}$ si et seulement si $\rho(B) < 1$.
a) Montrer que si $\rho(B) < 1$ la matrice $I - B$ est inversible.
b) En posant $A_k = I + B + B^2 + \cdots + B^k$ montrer que $A_k = (I - B)^{-1}(I - B^{k+1})$. En déduire que si $\rho(B) < 1$ alors $\lim_{k\to\infty} A_k = (I - B)^{-1}$.
Indication : On rappelle (voir le cours) que $C^k \to 0$ lorsque $k \to \infty$ si et seulement si $\rho(C) < 1$.
c) Montrer que si $\lim_{k\to\infty} A_k$ existe alors $\rho(B) < 1$.

Exercice 3. Existence de la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive

Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On note par M^T la matrice transposée d'une matrice M, par L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale et par U une matrice triangulaire supérieure.
a) Expliquez pourquoi la matrice A est régulière ?
b) On considère les sous-matrices (symétriques) Δ_k d'éléments a_{ij}, $1 \leq i, j \leq k$, de la matrice $A = (a_{ij})$. Montrer que les n sous-matrices Δ_k pour $1 \leq k \leq n$ sont définies positives.
Indication : On pourra considérer, pour $1 \leq k \leq n$, le vecteur quelconque $w = (w_i)_{1\leq i\leq k}$ et calculer le produit scalaire $(\Delta_k w, w)$ en le reliant à un produit scalaire (Av, v).
c) Comme toutes les sous-matrices Δ_k sont définies positives, et donc inversibles, il existe une unique décomposition $A = LU$ (théorème du cours). Montrer que les éléments diagonaux u_{ii} de U sont strictement positifs.
d) On considère la matrice diagonale $\Lambda = diag(\sqrt{u_{11}}, \cdots, \sqrt{u_{nn}})$, d'oú $\Lambda^{-1} = diag(\frac{1}{\sqrt{u_{11}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}})$. En écrivant que $A = LU = L\Lambda\Lambda^{-1}U = BC$ avec $B = L\Lambda$ et $C = \Lambda^{-1}U$, prouver que $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = I$ où I est la matrice identité.
Indication : On rappelle que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).
e) En déduire que $A = BB^T$.

f) On peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice B soient tous strictement positifs. Montrer alors que la factorisation correspondante $A = BB^T$ est unique.

La décomposition $A = BB^T$ est la décomposition de Cholesky d'une matrice A (symétrique définie positive).

Exercice 4. Résolution d'équations différentielles linéaires

a) Résoudre le système $\dot{x} = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

sous la condition initiale $x(0) = (1, -1, 1)^T$.

b) Résoudre le système $\dot{x} = Ax$ avec

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

sous la condition initiale $x(0) = (1, -1)^T$.