Mathématiques L3– Examen du 13/01/09

Tous les exercices sont indépendants et ont pour objectif de vous faire manipuler les notions du cours. Le minutage est évidemment indicatif.

Exercice 1 (30 mn)

Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Écrire la solution générale du système $\dot{x} = Ax$ où A est la matrice ci-dessus.

Exercice 2 (15 mn)

Résoudre le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x. \tag{2}$$

Exercice 3 (15 mn)

Calculer la solution générale de l'équation $\dot{x} = x + e^{2t}$. On rappelle que la fonction e^{2t} est dit le second membre de l'équation.

N. B. : On sait, par le cours, qu'il s'agit essentiellement de calculer une solution particulière de l'équation avec second membre .

Exercice 4 (15 mn)

Calculer la solution générale de l'équation $t\dot{x} = x + t^2$.

Indication : On pourra considérer l'opération $f \to tf' - f$ et remarquer que l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est stable pour cette opération.

Exercice 5 (15 mn)

Trouver les points fixes de l'équation $\dot{x} = r - x^2$ et étudier leur stabilité.

Exercice 6 (30 mn)

Soit la forme normale de la bifurcation transcritique

$$\dot{x} = rx - x^2. \tag{3}$$

1a) Dessiner le champ de vecteur pour $r < 0$, $r = 0$ et $r > 0$. Vérifier que $x_1^* = 0$ est un point fixe quel que soit r.

1b) Quel est le deuxième point fixe x_2^* ? Étudier la stabilité des deux points fixes x_1^* et x_2^* en fonction de r. Constater qu'il y a un échange de stabilité entre les deux points fixes lorsque le paramètre r "traverse" la valeur zéro.

1c) Dessiner le diagramme de cette bifurcation transcritique, c'est-à-dire dessiner, sur un même graphique, les graphes de x_1^* et x_2^* en fonction du paramètre r. On indiquera la stabilité en traits pleins et l'instabilité en pointillés.

2) Montrer que l'équation (du premier ordre) $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{bx})$ possède une bifurcation transcritique en $x_1^* = 0$ lorsque les paramètres a, b satisfont une certaine équation à déterminer. Quelle est cette équation ?

Indication : On note que $x = 0$ est un point fixe pour tout couple (a, b). On conseille d'exhiber un développement de Taylor du second membre autour de $x = 0$. En considérant la forme normale précédente, l'équation de la courbe de bifurcation transcritique, que doit satisfaire les paramètres a et b, s'en déduit. □

3) Quelle est l'équation du deuxième point fixe x_2^* ? Remarquer que son expression (en fonction de a et b) est valide seulement si x_2^* est petit. Vérifier que ce n'est possible que si les paramètres a et b sont proches de la courbe de bifurcation. □

