Mathématiques L3– Correction du partiel du 3/12/2010

Exercice 1

On vérifie que le système matriciel associé au système d'équations algébriques (1) est tridiagonal :

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ & & & & \mu_N & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Exercice 2

(a) On veut trouver x tel que $f(x) = Ax - b = 0$. Il est facile de vérifier que la différentielle de $f(x)$ est la matrice A. La méthode de Newton s'écrit donc (voir formule (1.4.4) du cours 1)

$$x_{k+1} = x_k - A^{-1}(Ax_k - b). \tag{2}$$

Remarquez que je n'écris pas $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k}{A}$ comme on serait tenter de le faire en s'inspirant de la formule (1.3.9) du cours 1. En effet cette écriture n'a aucun sens puisque A est une matrice et non un scalaire !

L'équation (2) se réécrit : $A(x_{k+1} - x_k) = b - Ax_k$, soit $Ax_{k+1} = b$ et le premier pas de la méthode donne la solution. La méthode de Newton donne la solution en une itération !

(b) Cette méthode de Newton est – hélas ! – peu exploitable, car elle nécessite la connaissance de A^{-1} et...c'est une toute autre histoire.

Exercice 3

Soit à résoudre léquation $g(x) = x^2 - b = 0$, avec $b > 0$. La racine à trouver est évidemment $x^* = \sqrt{b}$. On a $g'(x) = 2x$, la méthode de Newton s'écrit :

$$2x_k(x_{k+1} - x_k) = b - x_k^2,$$

soit

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{b}{x_k}).$$

Dès lors, l'écriture du dernier membre est la seule "astuce" de la solution :

$$x_{k+1} - \sqrt{b} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{b}{x_k}) - \sqrt{b} = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{b})^2.$$

Finalement $|x_{k+1} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2|x_k|}|x_k - \sqrt{b}|^2$. À chaque étape de la méthode la différence $x_k - \sqrt{b}$ décroît quadratiquement.

Exercice 4

L'équation (2) de l'énoncé se réécrit :

$$ydx - (x + y^2)dy = 0. \tag{3}$$

Avec les notations du cours 3, on a $M(x,y) = -(x^2 + y)$ et $L(x,y) = y$. On devrait avoir si (3) était une différentielle exacte $\frac{\partial M}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial L}{\partial y}(x,y)$ (théorème 3.5.1 du cours) , ce qui n'est pas le cas car $\frac{\partial M}{\partial x}(x,y) = -2x$ et $\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 1$.

Cependant on observe que

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Multiplions alors l'équation (3) par $\frac{1}{y^2}$ (en supposant $y \neq 0$), on a la suite d'équivalences suivante :

$$(3) \Leftrightarrow \frac{ydx - xdy}{y^2} - dy = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{x}{y} - y\right) = 0. \tag{4}$$

Les courbes intégrales sont donc données par $\frac{x}{y} - y = \lambda$, où λ est une constante, ou encore par $x = y^2 + \lambda y$. $\square$

Exercice 5

Calculons le déterminant de la matrice $(A - \lambda I)$ en le développant par rapport à le première ligne. Il vient :

$$det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda) - 2] = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda). \tag{5}$$

les valeurs propres sont 1, 2 et 5. Calculons le vecteur propre w_1 tel que

$$(A - I)w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} w_1 = 0.$$

On trouve que $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur de base de l'espace propre de dimension un associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, et que pour $\lambda_2 = 2$ (resp. $\lambda_3 = 5$) $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$). $\square$

