Mathématiques L3 – Correction de l'examen du 15/6/2012

Exercice 1

1) **Première solution**

Par des calculs élémentaires on vérifie que $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $J^5 = J$, $J^6 = J^2$, etc., et, généralement, $J^{4l+k} = J^k$ pour $l \in \mathbb{N}$ et $k = 1, 2, 3, 4$. Par la formule (6.3.1) (cours 6) de l'exponentielle matricielle, on a

$$e^{tJ} = I + tJ + \frac{t^2}{2!}J^2 + \frac{t^3}{3!}J^3 + \frac{t^4}{4!}J^4 + \frac{t^5}{5!}J^5 + \cdots$$

Tenu compte des expressions des puissances de J, il vient :

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2/2! & 0 \\ 0 & -t^2/2! \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t^3/3! \\ -t^3/3! & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} t^4/4! & 0 \\ 0 & t^4/4! \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t^5/5! \\ t^5/5! & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

et

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2! + t^4/4! + \cdots & -t + t^3/3! - t^5/5! + \cdots \\ t - t^3/3! + t^5/5! + \cdots & 1 - t^2/2! + t^4/4! + \cdots \end{pmatrix}$$

On reconnaît les séries de Taylor des sinus et cosinus de rayon de convergence infini, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il vient :

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{1}$$

e^{tJ} est une matrice de rotation d'angle t.

Deuxième solution du 1)

Considérons le système différentiel suivant :

$$\dot{X} = JX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \tag{2}$$

où $X = (x, y)^T$. On sait (cours 6) que la solution s'écrit

$$X = e^{tJ} X_0 \tag{3}$$

où X_0 est la condition initiale. Le système (2) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En prenant comme solutions réelles indépendantes les parties réelle et complexe de l'exponentielle complexe e^{-it} (voir aussi le paragraphe 3.3.2 du cours 3 où l'on a choisi les parties réelle et complexe de l'exponentielle complexe e^{it}), le système (4) a pour solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

où les constantes C_1 et C_2 sont définies par la condition initiale X_0. En comparant (5) et (3) on retrouve l'expression (1) de e^{tJ}.

2) On vérifie trivialement que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

de même B^2 est une 2×2 nulle. Les puissances successives des matrices A et B sont donc nulles. Dès lors on a $e^A = I + A + A^2/2! + \cdots = I + A$ et $e^B = I + B + B^2/2! + \cdots = I + B$, donc $e^A e^B = (I + A)(I + B) = I + A + B + AB$ et $e^B e^A = (I + B)(I + A) = I + B + A + BA$. Or, on observe que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, les matrices A et B ne permutent pas et, d'après les expressions précédentes, $e^A e^B \neq e^B e^A$. Plus précisément on vérifie que

$$e^A e^B = I + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

et

$$e^B e^A = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Finalement calculons e^{A+B}. On a

$$e^{A+B} = I + (A + B) + \frac{(A + B)^2}{2!} + \frac{(A + B)^3}{3!} + \frac{(A + B)^4}{4!} + \cdots,$$

avec

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Comme $AB \neq BA$, il est plus judicieux de calculer directement les puissances de la matrice $(A + B)$. On a $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, d'où $(A + B)^3 = (A + B)$, $(A + B)^4 = I$, etc. Au total, il vient :

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots$$

et

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 + 1/2! + 1/4! + 1/6! \cdots & 1 + 1/3! + 1/5! + \cdots \\ 1 + 1/3! + 1/5! + \cdots & 1 + 1/2! + 1/4! + 1/6! \cdots \end{pmatrix}.$$

Avec les développements rappelés dans l'ènoncé, il vient :

$$e^{A+B} = \cosh(1) I + \sinh(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Par (7), (8) et (10) on a donc $e^{A+B} \neq e^A e^B \neq e^B e^A$ alors que $AB \neq BA$, ce qui conclut.

Exercice 2

Trouver la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ ou de $x^2 = x + 1$, revient à trouver le point fixe de l'équation $x = F(x)$ avec $F(x) = \sqrt{x+1}$. On sait (théorème 1.3.1 du cours) que la méthode de Picard converge si F est une contraction lipschitzienne. Or $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $J = [0, \infty[$. On peut donc partir d'un point arbitraire sur J pour converger vers le point fixe, ou la racine, a satisfaisant à $a = \sqrt{1+a}$.

Le processus itératif s'écrit $x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+\sqrt{1+x_{n-1}}}$. On a donc la convergence des itérés vers $a = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.

On remarque que la racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, c'est une équation banale du second degré, est $a = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803...$.

Exercice 3

1) Soit un maillage régulier de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n$, avec $x_1 = a$ et $x_{n+1} = b$. Le pas h du maillage est $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_j = a + (j-1)h$ pour $1 \leq j \leq (n+1)$. Sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la méthode des trapèzes est définie par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})). \tag{11}$$

Or on a $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$. D'après (11) il vient $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$, soit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h\sum_{i=2}^n f(x_i). \tag{12}$$

Supposons maintenant que $f(x) = C$ où C est une constante. Son intégrale sur $[a, b]$ est $C(b-a)$. Par ailleurs, le second membre de (12) s'écrit $\frac{h}{2}(2C) + h\sum_{i=2}^n C = h\sum_{i=1}^n C = \frac{b-a}{n}nC = C(b-a)$. La méthode des trapèzes est exacte pour les constantes.

On remarque qu'il suffit que la méthode soit exacte sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour qu'elle soit exacte sur $[a, b]$.

Vérifions qu'elle est exacte pour $f(x) = x$. Dès lors, d'après ce qu'on vient de voir, elle sera exacte pour $f \in \mathcal{P}^1$, où $\mathcal{P}^1$ est l'espace des polynômes de degré un. D'après la remarque faite il suffit de vérifier l'exactitude de la formule sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Le premier membre de (11) est évidemment $\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}(x_{i+1} + x_i) = \frac{h}{2}(x_{i+1} + x_i)$. Le dernier terme est exactement l'expression du second membre de (11) si $f(x) = x$. Ce qui conclut.

La méthode ne peut pas être exacte pour $f \in \mathcal{P}^2$, espace des polynômes de degré deux. Soit $f(x) = x^2$, la formule serait exacte si on pouvait calculer exactement l'aire d'un arc de parabole sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un trapèze. Ce qui est évidemment impossible.

2) Évidemment on a

$$e(h) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)). \tag{13}$$

Soit la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)dt. \tag{14}$$

Introduisons la fonction

$$(x-t)_+ = \begin{cases} (x-t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}. \tag{15}$$

et considérons le terme intégral dans (14). On a $\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b$. Or si $t \in [x, b]$ par définition $(x-t)_+ = 0$ et si $t \in [a, x]$ par définition $(x-t)_+ = x - t$. On peut écrire $\int_a^x (x-t) f''(t)dt = \int_a^x (x-t)_+ f''(t)dt + \int_x^b (x-t)_+ f''(t)dt$ puisque la dernière intégrale est nulle. Nous avons donc $\int_a^x (x-t) f''(t)dt = \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt$, et on a d'après (14) :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt. \tag{16}$$

Comme par définition $\mathcal{L}_x(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$ avec $h = b - a$, $\mathcal{L}_x(f)$ représente l'erreur $e(h)$ de la méthode des trapèzes appliquée à la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ en la variable x.

$\mathcal{L}_x$ est évidemment linéaire en la fonction, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}_x(f_1 + f_2) = \int_a^b (f_1 + f_2)(x)dx - \frac{h}{2}\Big((f_1 + f_2)(a) + (f_1 + f_2)(b)\Big) = \mathcal{L}_x(f_1) + \mathcal{L}_x(f_2).$$

On a donc en appliquant $\mathcal{L}_x$ à l'équation (16)

$$\mathcal{L}_x(f(x)) = \mathcal{L}_x(f(a)) + f'(a)\mathcal{L}_x(x-a) + \mathcal{L}_x\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right).$$

On a vu à la question 1) que la méthode est exacte pour les constantes et les polynômes de degré un. On a donc $\mathcal{L}_x(f(a)) = 0$ et $\mathcal{L}_\S(x-a) = 0$. Il reste $e(h) = \mathcal{L}_x\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right)$. On a par définition de $\mathcal{L}_x$:

$$\mathcal{L}_x\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) = \int_a^b \left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) dx - \frac{b-a}{2}\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt|_{x=a} + \int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt|_{x=b}\right). \tag{17}$$

On peut intervertir les deux signes d'intégration dans l'intégrale double car, premièrement, f'' est continue - en effet $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ par hypothèse ; de plus, la fonction $(x-t)_+$ est (au moins !) continue en ces deux variables. Comme on travaille sur le compact $[a, b] \times [a, b]$, l'intégrable double existe (une fonction continue sur un compact est bornée) et on peut donc (par le théorème de Fubini) intervertir les deux signes d'intégration. Il vient :

$$\int_a^b \left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) dx = \int_a^b f''(t)\left(\int_a^b (x-t)_+ dx\right) dt.$$

Finalement d'après (17) on a :

$$e(h) = \mathcal{L}_x\left(\int_a^b (x-t)_+ f''(t)dt\right) = \int_a^b f''(t)K(t)dt,$$

avec

$$K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - \frac{b-a}{2}\left((x-t)_+|_{x=a} + (x-t)_+|_{x=b}\right).$$

On constate que $K(t) = \mathcal{L}_x((x-t)_+)$.

3) Calculons $K(t) = \int_a^b (x-t)_+ dx - \frac{b-a}{2}\left((a-t)_+ + (b-t)_+\right)$ pour $a \leq t \leq b$. Par définition on a $(a-t)_+ = 0$ et $(b-t)_+ = (b-t)$ pour tout t tel que $a \leq t \leq b$. On a donc

$$K(t) = \frac{(x-t)_+^2}{2}|_{x=a}^{x=b} - \frac{b-a}{2}(b-t),$$

soit

$$K(t) = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b-a}{2}(b-t) = \frac{(b-t)(a-t)}{2}. \tag{18}$$

4) On sait que la dérivée seconde f'' est au moins continue. De plus, il est évident, d'après (18), que la fonction K est positive pour tout $t \in [a,b]$, c'est là un point essentiel pour appliquer le théorème de la moyenne. Dès lors, par celui-ci, il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$e(h) = \int_a^b f''(t)K(t)dt = f''(c)\int_a^b K(t)dt.$$

Le calcul de l'intégrale de K est élémentaire, il suffit de développer ce polynôme et d'intégrer terme à terme. On trouve $\int_a^b K(t)dt = \frac{1}{12}(a-b)^3 = -\frac{1}{12}h^3$ et donc

$$e(h) = -\frac{1}{12}h^3 f''(c). \tag{19}$$

5a) On a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \tag{20}$$

soit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right),$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_1}{2}f(a) + \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)f(x_2) + \cdots + \left(\frac{h_{n-1}+h_n}{2}\right)f(x_n) + \frac{h_n}{2}f(b).$$

Si $h_i = h$ pour tout i on retrouve évidemment la formule (12).

5b) Avec les notations de cette question, d'après la formule (19), l'erreur sur le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est $e_i(h_i) = -\frac{h_i^3}{12}f''(c_i)$ avec $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. On a $E = \sum_{i=1}^n e_i(h_i)$, comme $|f''(c_i)| \leq \max_{x\in I}|f''(x)|$ il vient :

$$|E| \leq \sum_{i=1}^n |e_i(h_i)| \leq \sum_{i=1}^n \frac{h_i^3}{12}\max_{x\in I}|f''(x)|.$$

De plus comme $h_i^3 \leq h^2 h_i$, il vient $\sum_{i=1}^n \frac{h_i^3}{12}\max_{x\in I}|f''(x)| \leq \max_{x\in I}|f''(x)|\frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^n h_i$ avec $\sum_{i=1}^n h_i = b-a$. Ce qui démontre la formule de l'énoncé.

Comme la dérivée seconde d'un polynôme de degré un est nulle, la méthode itérée des trapèzes, avec une partition arbitraire, est exacte si $f \in \mathcal{P}^1$. Par contre la méthode est inexacte pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à deux. Cette méthode est donc d'ordre un (ne pas confondre avec l'ordre de l'erreur $e(h)$, qui est d'ordre 3 en h si la partition est régulière).

Remarque 1 *Observons que la partition non régulière de l'intervalle I d'intégration est intéressante si nous connaissons la fonction f à intégrer en des points non nécessairement équidistants. Cela évite de faire au préalable, dans le cadre d'une méthode des trapèzes à pas h constant, des interpolations sources d'erreurs supplémentaires.*

Exercice 4

L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux est stable pour l'opération $f \to tf' - f$. Cherchons donc une solution particulière de la forme $x_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. En remplaçant dans l'équation, il vient $t(2\alpha t + \beta) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + t^2$ soit, en identifiant les coefficients des termes de même degré : $\alpha = 1, \gamma = 0$ et β quelconque. On peut donc prendre $\beta = 0$ et $x_p(t) = t^2$ est donc une solution particulière. Calculons les solutions x_h de l'équation homogène. On a $t\dot{x} = x$, soit $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{t}$; il vient $\log x = \log t + \log C$ ou encore $x_h(t) = Ct$ où C est une constante.

La solution générale est donc $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = t^2 + Ct$. La constante C est déterminée par la condition initiale.

Exercice 5

Notons qu'il est facile de partir du modèle logistique général $\dot{x} = x(a - bx)$, où a et b sont des constantes positives, pour arriver à l'équation $\dot{x} = x(1 - x)$ par un changement de variable du type $y = kx$, $k > 0$, et un paramétrage approprié du temps.

Soit donc l'équation de l'énoncé
$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))x(t) - c, \tag{21}$$
où c est une constante strictement positive.

1) Les points d'équilibre sont les racines de $f(x) = -x^2 + x - c$. Ces racines sont $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$ si $(1 - 4c) \geq 0$. Leur existence et leur stabilité dépendent de c.

- Si $c < 1/4$ on a deux racines positives $0 < x_1 < x_2$ et $f(x) = -(x - x_1)(x - x_2)$. Dès lors on a $\dot{x} > 0$ si $x_1 < x < x_2$ et $\dot{x} < 0$ si $x < x_1$ ou $x > x_2$.
  Donc si l'effectif est plus petit que x_1 il décroît vers zéro.
  Si $x_1 < x < x_2$, l'effectif croît vers x_2.
  Si $x > x_2$, l'effectif décroît vers x_2.
  Le point x_1 est instable et le point x_2 est stable. La prise en compte de la capture par le nombre c, lorsque $c < 1/4$, a deux effets : la population à l'équilibre stable est plus faible avec capture ($x_2 = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2 < 1$) que celui sans capture ($x_2 = 1$), de plus, en-dessous de l'effectif x_1, la population disparaît.
- Si $c = 1/4$, on a une solution double $x_1 = 1/2$. La dérivée $\dot{x}(t)$ est toujours strictement négative sauf pour $x = x_1$ où elle est nulle. Si l'effectif est plus petit que x_1 il décroît vers 0, s'il est plus grand que x_1 il tend vers x_1. La solution x_1 est semi-stable. Le point x_1 peut en théorie se maintenir à l'effectif x_1, mais toute perturbation par valeur inférieure fait disparaître l'équilibre. Remarquons que la courbe de la fonction $f : x \to -x^2 + x - 1/4$ est concave, c'est une parabole de sommet $(x = 1/2, \dot{x} = 0)$ dans le plan de phase. Une capture à taux $c = 1/4$ correspond au maximum du taux de croissance logistique $\dot{x}$, elle est donc trop forte pour que la population se maintienne à un état d'équilibre.
- Si $c > 1/4$, il n'y a pas de point d'équilibre. La dérivée est partout négative. La capture est trop forte et la population disparaît.

2) Calculons la solution dans les différents cas de l'énoncé. Commençons par le cas $c = 1/4$, qui est très facile.

• **Cas** $c = 1/4$.

On a une solution double, notée x_1 avec $x_1 = 1/2$, et on peut écrire : $\dot{x}(t) = -(x(t) - x_1)^2$, d'où

$$-\int^x \frac{dx}{(x-x_1)^2} = \int^t dt, \tag{22}$$

soit

$$-\frac{1}{(x-x_1)} = C + t, \tag{23}$$

avec $C = 1/(x_0 - x_1)$. Il vient la solution

$$x = x_1 + \frac{x_0 - x_1}{1 + (x_0 - x_1)t}. \tag{24}$$

• **Cas** $c < 1/4$.

Si $c < 1/4$ on a deux racines et on peut écrire

$$\dot{x}(t) = (x_2 - x(t))(x(t) - x_1), \tag{25}$$

ce qui s' écrit

$$\frac{dx}{(x_2 - x)(x - x_1)} = dt,$$

ou encore

$$\int^x \frac{dx}{(x_2 - x)(x - x_1)} = \int^t dt = Q + t, \tag{26}$$

où Q est une constante à déterminer par la condition initiale. Pour calculer la primitive du premier membre, décomposons la fraction rationnelle en éléments simples. On vérifie que

$$\frac{1}{(x_2 - x)(x - x_1)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{1}{x_2 - x} + \frac{1}{x - x_1}\right) \tag{27}$$

Portons dans (31, il vient :

$$\int^x \frac{dx}{x_2 - x} + \int^x \frac{dx}{x - x_1} = (x_2 - x_1)(Q + t) \tag{28}$$

on peut poser $K = (x_2 - x_1)Q$, où K est une constante à déterminer par la condition initiale.

Petite digression : Posons $\tau = (x_2 - x_1)t$, c'est-à-dire changeons d'échelle de temps. On définit $z(\tau) = x(t)$, alors

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{x}(t)}{(x_2 - x_1)}.$$

Le premier membre de l'équation (25) peut donc s'écrire $(x_2 - x_1)\frac{dz}{d\tau}$. Les racines x_1 et x_2 sont évidemment indépendantes du temps, le second membre se réécrit donc $(x_2 - z(\tau))(z(\tau) - x_1)$, finalement (25) se réécrit

$$\dot{z}(\tau) = \frac{(x_2 - x(t))(x(t) - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - z(\tau))(z(\tau) - x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{29}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations habituelles

$$\dot{x}(t) = \frac{(x_2 - x(t))(x(t) - x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{30}$$

On reprend les calculs précédents. On a

$$(x_2 - x_1)\frac{dx}{(x_2 - x)(x - x_1)} = dt,$$

d'où en prenant les primitives

$$(x_2 - x_1)\int^x \frac{dx}{(x_2 - x)(x - x_1)} = \int^t dt = K + t, \tag{31}$$

et d'après (27)

$$\int^x \frac{dx}{x_2 - x} + \int^x \frac{dx}{x - x_1} = K + t. \tag{32}$$

Fin de la petite digression.

Maintenant calculons explicitement la solution de l'équation différentielle.

Il est plus naturel de travailler avec (32). En fait l'équation (32) est évidemment équivalente à (28) où il suffit de poser $K = (x_2 - x_1)Q$ et $\tau = (x_2 - x_1)t$, en renommant τ par t puisque le temps est une variable muette.

En prenant les primitives en x du premier membre de (32), il vient $\int^x \frac{dx}{x_2 - x} = -\log|x_2 - x|$ et $\int^x \frac{dx}{x - x_1} = \log|x - x_1|$ d'où la solution :

$$\frac{|x(t) - x_1|}{|x_2 - x(t)|} = Ce^t. \tag{33}$$

où $C = |x_0 - x_1|/|x_2 - x_0|$.

Il semble qu'il faille distinguer trois cas selon la position de la solution $x(t)$ par rapport aux points d'équilibre x_1 et x_2. En fait il n'en est rien, même si tout semble dépendre de la position de x_0 par rapport à x_1 et x_2. En effet supposons que $x_1 < x(t) < x_2$ pour tout t. Alors $x_2 - x(t) > 0$ et $x(t) - x_1 > 0$, d'après (33) on a

$$\frac{x(t) - x_1}{x_2 - x(t)} = Ce^t. \tag{34}$$

Par hypothèse on a $x_1 < x_0 < x_2$, d'où $C = (x_0 - x_1/(x_2 - x_0)$. Dès lors (34) s'écrit $(x(t) - x_1)/(x_2 - x(t)) = (x_0 - x_1)/(x_2 - x_0)e^t$, d'où l'on tire :

$$x(t) = \frac{x_2\left[\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}e^t\right] + x_1}{1 + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}e^t} = \frac{(x_0 - x_1)x_2 + (x_2 - x_0)x_1 e^{-t}}{(x_0 - x_1) + (x_2 - x_0)e^{-t}}. \tag{35}$$

Inversement, il est très facile de voir, d'après (35), que si $x_1 < x_0 < x_2$ alors $x_1 < x(t) < x_2$ pour tout temps t. D'autre part, on vérifie bien que $x(0) = x_0$.

De plus, on vérifie, toujours grâce à (35), que si $x_0 < x_1 < x_2$ alors $x(t) < x_1 < x_2$ pour tout temps t, et que si $x_1 < x_2 < x_0$ alors $x_1 < x_2 < x(t)$ pour tout temps t. Inversement si $x(t) < x_1 < x_2$ pour tout

t, on ne fait le raisonnement que dans ce cas-là, d'après (33), on est amené à résoudre l'équation algébrique $(x_1 - x(t))/(x_2 - x(t)) = Ce^t$ avec, par hypothèse, $C = (x_1 - x_0)/(x_2 - x_0)$. C'est-à-dire que l'on a à résoudre

$$\frac{x(t) - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} e^t,$$

qui est l'équation (34) précédente qui fournit la solution (35).

En résumé, quelle que soit la condition initiale x_0, la solution est toujours donnée par (35) lorsque $c < 1/4$. La position de x_0 détermine la plage de variation de la solution $x(t)$.

• **Cas** $c > 1/4$ Il n'y a pas de solution explicite simple.

3) **Soit** $c < 1/4$, remarquons que le dénominateur de (35) s'annule éventuellement pour un temps t_c tel que $(x_1 - x_0) = (x_2 - x_0)e^{-t_c}$, soit

$$t_c = \log\left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}\right).$$

Ce temps t_c n'existe pas si $x_0 > x_1$. Le cas $x_0 < x_1$ est vu en détails à la question 4). On en concluera que l'équilibre x_1 est instable.

Alors, on voit immédiatement, d'après (35), que si $x_0 > x_1$ la trajectoire tend vers x_2 lorsque $t \to +\infty$, que x_0 soit supérieur ou inférieur à x_2 (en restant supérieur à x_1). L'équilibre x_2 est stable.

Soit $c = 1/4$, on constate sur (24) que

• Si $x_0 > x_1$, la trajectoire tend vers x_1 par valeurs supérieures lorsque $t \to +\infty$;

• Soit $x_0 < x_1$, le dénominateur est nul pour une valeur critique du temps $t_c = 1/(x_1 - x_0)$. Comme $(x_0 - x_1) < 0$, $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to t_c = 1/(x_1 - x_0)$ par valeurs supérieures. La solution tend vers zéro en un temps fini. Au total l'unique équilibre x_1 est semi-stable si $c = 1/4$.

Soit $c > 1/4$ On ne peut rien dire explicitement car on ne dispose pas de la solution.

4) Soit $c < 1/4$. Si $x_0 < x_1$ la limite semble la même - c'est-à-dire x_2 - que lorsque $x_0 > x_1$, mais la solution a un comportement différent. Le dénominateur de (35) s'annule pour un temps t_c tel que

$$t_c = \log\left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}\right).$$

Pour $t = t_c$ le numérateur N de (35) est égal à $N = (x_0 - x_1)x_2 + (x_1 - x_0)x_1 = (x_0 - x_1)(x_2 - x_1)$ qui est négatif si $x_0 < x_1$. Donc, si on part de x_0 tel que $0 < x_0 < x_1$, comme la solution continue tend vers $-\infty$ lorsque $t \to t_c$, par le théorème des valeurs intermédiaires (paragraphe 1.3 du cours 1) la solution s'annule - disparaît - en un temps fini. Au total, en reprenant la question 3), l'équilibre x_1 est instable.

On retrouve que lorsque $x_0 < x_1$ alors $x \to 0$, maintenant on peut préciser qu'elle le fait en un temps fini.

N.B. : On remarque l'intérêt de l'analyse qualitative qui évite des calculs, lorsqu'ils sont possibles, souvent un peu techniques.