Mathématiques L3– Correction de l'examen du 13/01/2011

Exercice 1

a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

supposée inversible et donc de déterminant non nul, c'est-à-dire que $ac - b^2 \neq 0$. Calculons son inverse par la méthode de Gauss, sans stratégie de pivot, vue au septième cours et dont nous empruntons les notations. Comme $a \neq 0$, multiplions-la par la matrice

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$E^{(1)} M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

d'où

$$M = (E^{(1)})^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix},$$

soit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ac-b^2}{a} \end{pmatrix}^{-1} E^{(1)} = U^{-1} E^{(1)}$$

avec une définition évidente de la matrice U. La matrice U étant triangulaire supérieure est très facile à inverser. On trouve, sachant que $ac - b^2 \neq 0$:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix},$$

donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac-b^2} \\ 0 & \frac{a}{ac-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) On a

$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} & -A^{-1}BS \\ -SB^TA^{-1} & S \end{pmatrix},$$

soit

$$NN^{-1} = \begin{pmatrix} I + BSB^TA^{-1} - BSB^TA^{-1} & -BS + BS \\ B^TA^{-1} + B^TA^{-1}BSB^TA^{-1} - CSB^TA^{-1} & -B^TA^{-1}BS + CS \end{pmatrix}.$$

Le bloc supérieur gauche est évidemment la matrice identité. Le bloc inférieur droite s'écrit $(-B^TA^{-1}B + C)S$. Par la définition de S, $S^{-1} = C - B^TA^{-1}B$, et on constate que le facteur de la matrice S dans $(-B^TA^{-1}B + C)S$

est S^{-1}. Le bloc inférieur droite est donc l'identité. Le bloc supérieur droite est évidemment la matrice nulle. Reste à considérer le bloc inférieur gauche qui s'écrit :

$$B^TA^{-1} + B^TA^{-1}BSB^TA^{-1} - CSB^TA^{-1} = (I + B^TA^{-1}BS - CS)B^TA^{-1} \tag{2}$$

.

D'après l'expression de S^{-1} on a $(C - B^TA^{-1}B)S = I$, soit $CS - B^TA^{-1}BS = I$ ou $I - CS + B^TA^{-1}BS = 0$. Par l'équation (2), le bloc inférieur gauche est donc une matrice nulle. On a donc finalement $NN^{-1} = I$.

On démontre de même que $N^{-1}N = I$. $\square$

c) Considérons des scalaires a, b et c à la place des matrices (respectivement) des matrices-blocs A, B et C de la matrice N. La matrice N est alors la matrice M du a). Alors on a $A^{-1} = \frac{1}{a}$ et $S = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{ac-b^2}$. Traduisons tous les termes de la matrice N^{-1}.

i) $A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{c}{ac-b^2}$,

ii) $-A^{-1}BS = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{-b}{ac-b^2}$,

iii) $-SB^TA^{-1} = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{ac-b^2}\right) = \frac{-b}{ac-b^2}$,

iv) $S = \frac{a}{ac-b^2}$.

Finalement $N^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$, on retrouve l'expression (1) de M^{-1}.

d) Soient les matrices diagonales de N^{-1} qui sont carrées. La matrice $\mathcal{M}$ est symétrique. En effet soit $\mathcal{M}^T = C^T - B^T(A^{-1})^TB^T$, comme A est symétriques $(A^{-1})^T$ est symétrique, comme C est aussi symétrique on a donc $\mathcal{M}^T = C - B^TA^{-1}B^T = \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est symétrique, son inverse S l'est donc aussi. Soit la matrice $\mathcal{N} = A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1}$. Grâce à la symétrie de A^{-1} et S il vient : $\mathcal{N}^T = (A^{-1})^T + (A^{-1})^T(B^T)^TS^TB^T(A^{-1})^T = A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} = \mathcal{N}$. Les deux blocs diagonaux carrés sont donc symétriques. Considérons maintenant les matrices blocs non-diagonaux de N^{-1} qui sont rectangulaires si B est rectangulaire. Regardons le bloc supérieur droit en prenant son symétrique. Puisque A^{-1} et S sont symétriques on a : $(-A^{-1}BS)^T = -S^TB^T(A^{-1})^T = -SB^TA^{-1}$ qui est le bloc inférieur gauche. Les blocs non-diagonaux sont donc transposés l'un de l'autre. La matrice N^{-1} est donc symétrique. $\square$

Exercice 2

Par la linéarité de l'intégration il suffit de montrer que la formule de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right), \tag{3}$$

intègre exactement les constantes et les monômes x, x^2 et x^3, puisque ces monômes forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. Si $f = C$ où C est une constante, il vient :

$$\int_a^b Cdx = C(b-a),$$

alors que $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = C(b-a)$. Les constantes sont exactement (et heureusement !) intégrées.

Si $f(x)=x$, on a :

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{6}\left(3(b+a)\right),$$

alors que $\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a+4(\frac{a+b}{2})+b = 3(b+a)$. La formule (3) est aussi exacte.

Si $f(x)=x^2$, on a :

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b-a}{6}\left(2(b^2+ab+b^2)\right),$$

alors que

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a^2+4\frac{(a+b)^2}{4}+b^2 = 2(b^2+ab+b^2).$$

La formule (3) est aussi exacte dans ce cas.

Finalement soit $f(x)=x^3$, on a :

$$\int_a^b x^3dx = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b-a}{6}\left(\frac{3}{2}(b+a)(b^2+a^2)\right) = \frac{b-a}{6}\left(\frac{3}{2}(a^3+ba^2+ab^2+b^3)\right), \tag{4}$$

alors que

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = a^3+4\frac{(a+b)^3}{8}+b^3 = a^3+\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{2}+b^3,$$

soit

$$\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right) = \frac{3}{2}(a^3+ba^2+ab^2+b^3).$$

L'expression

$$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

est donc égale à (4). La formule de Simpson est encore exacte si $f(x)=x^3$, ce qui conclut.

Exercice 3

a) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix},$$

il est clair que, pour toute ligne de cette matrice $2|a| \geq 1$ si $1/2 \leq a < 1$, elle n'est donc pas SDD pour ces valeurs de a. Pour prouver qu'elle est définie positive, pour $1/2 \leq a < 1$ il suffit de montrer qu'alors ces valeurs propres λ_i sont strictement positives. Calculons-les en cherchant les racines du polynôme caractéristique de la matrice A, c'est-à-dire du déterminant de la matrice $(A - \lambda I)$. On a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Posons $\mu = 1 - \lambda$, il vient $P(\lambda) = \mu^3 - 3a^2\mu + 2a^3$. On a $P(\lambda) = 0$ si $\mu^3 - 3a^2\mu + 2a^3 = 0$, $\mu = a$ est une racine évidente, les racines du polynôme en μ sont donc a (racine double) et $\mu = -2a$, les racines du polynôme $P(\lambda)$ sont par conséquent $\lambda = (1 - a)$ (racine double) et $\lambda = (1 + 2a)$. Ces racines sont strictement positives si $1/2 \leq a < 1$, ce qui conclut. $\square$

b) Soit la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que si $|a| < 2$ cette matrice est SDD. Pour décider si elle est ou non définie positive, calculons ces valeurs propres. Avec les notations du a), on a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

d'où $P(\lambda) = 4 - \lambda^2 + a^2$. Les racines de $P(\lambda)$ sont $\lambda = \pm\sqrt{a^2 + 4}$, pour toute valeur de a une valeur propre est toujours négative. La matrice A n'est jamais définie positive. $\square$

Exercice 4

Calculons les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

alors on a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(3 + \lambda) \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $P(\lambda) = -(3 + \lambda)\lambda(1 + \lambda) + 2\left(-1 - 2(1 + \lambda)\right) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6$ qui a pour racine évidente -2. Dès lors $P(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3)$, les deux autres racines de $P(\lambda)$ sont $-1 \pm i\sqrt{2}$.

Calculons les vecteurs propres associés. Un calcul élémentaire montre que :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre -2. Par conséquent :

$$X_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

est une solution.

Toujours par un calcul élémentaire (un peu fastidieux) on trouve qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $(-1 + i\sqrt{2})$ est

$$v_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$Z = e^{-t} e^{i\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

est une solution complexe du système. Elle s'écrit :

$$Z = e^{-t}(\cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

d'où en séparant les parties réelle et imaginaire

$$Z = e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

de la forme $Z = X_2 + iX_3$.

On sait (voir cours 6) que les parties réelle et imaginaire de Z sont des solutions indépendantes du système. Donc

$$X_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

et

$$X_3 = e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

sont solutions. Finalement la solution du système est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -2C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(\cos(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\left(\sin(\sqrt{2}t)\right) \\ C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}\left(-\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right) + C_3e^{-t}\left(-\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \end{pmatrix},$$

où les constantes C_1, C_2 et C_3 sont déterminées par la condition initiale. Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve facilement $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$ et $C_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, d'où la solution désirée :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{5\sqrt{2}}{6}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soient $\mu > 0$ et l'équation $\dot{x} = x(\mu - x^2)$, si $x < -\sqrt{\mu}$ alors $(\mu - x^2) < 0$, $\dot{x} > 0$ et x croît. Lorsque $-\sqrt{\mu} < x < 0$ alors $(\mu - x^2) > 0$, $\dot{x} < 0$ et x décroît. La branche des équilibres $x = -\sqrt{\mu}$ est donc stable.

